準同型定理のお気持ち

カプースタ　(Twitter：@s3tudyroom)

はじめに

群論を学ぶとき、準同型定理というものが出てくる。学ぶ際の流れは基本的に、準同型を定義し、剰余類・正規部分群をうまく定義すると準同型定理が成り立つようになるという流れだと思う。この流れでは、なぜそのような定義をするのかがわかりずらく、漠然と準同型定理が成り立っているように感じられる。しかし、準同型定理はもっと簡単な集合と写像における 1 つの定理 (ここでは「写像の分解」と呼ぶ) の応用なのである。ここでは写像の分解を群に応用することを意識した形で準同型定理を導出していく。

1　写像の分解

まず、主題となる写像の分解を紹介する。この定理の証明は集合論としての前提知識とする、または読者に任せる。

定理 1 (写像の分解)**.** 集合 X, Y と写像 $f : X \to Y$ が与えられているとする。このとき、X 上の同値関係 $\sim$ が

$$x \sim y \Longrightarrow f(x) = f(y)$$

を満たしているとき、$f = g \circ \pi$ となる写像 $g : X/\sim \to Y$ が一意的に存在する。ただし、$\pi : X \to X/\sim$ は自然な写像である。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd}$$

さらに、$f(X) = g(X/\sim)$ である。特に

$$x \sim y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

が成り立っているなら、$g : X/\sim \to Y$ は単射となる。

2　群論の目的と群準同型写像

群論の主な目的のひとつとして、群の比較・分類することが挙げられる。その手法として、群の構造を (ある程度) 保つ写像を用いて群を比較する方法がある。具体的に、もし群 G の構造を保つ群 H への単射があったとすると、その値域は G と同じ構造をもつことになる。つまり、群 H の中に群 G と同じ構造の部分が存在することがわかる。このようにして群を比較することができるのである。

この群の構造を保つ写像が群準同型写像である。では群の構造を保つ写像とはどういうものだろうか。そもそも保たれるべき群の構造とは何だろうか。群の特徴として、第一に挙げられるものはや

はり演算が定義されていることであろう。次に群の公理として、単位元・逆元の存在、結合法則が挙げられる。群論的性質は群の公理から導かれるものなので、群の公理さえ保存されれば群の構造を保つと言ってよいだろう。

まず、演算についてこれが保存されるものを考える。つまり、群 G, H に対して写像 $\varphi: G \to H$ が

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \quad (x, y \in G)$$

を満たしているとする。このとき、この写像 φ は次の性質を満たしていることがわかる。

$$\begin{aligned} &(1)\ \varphi(e_G) = e_H \\ &(2)\ {}^\forall x \in G, \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1} \end{aligned}$$

これから演算さえ保たれれば、今我々の欲しい群の構造を保つ写像が得られることがわかる。

結論として、群準同型写像の定義としては次を採用すればよいだろう。群 G, H に対して

$${}^\forall x, y \in G, \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

を満たす写像 $\varphi: G \to H$ を群準同型写像という。以下、群準同型写像を単に準同型ということにする。また、G, H を群、$\varphi: G \to H$ を準同型とすると、その像 $\operatorname{Im}\varphi = \varphi(G)$ は H の部分群となる。

3　準同型のイメージと写像の分解の応用

まず、準同型のイメージを見ることで、どのように写像の分解が応用できそうかを考える。準同型 $\varphi: G \to H$ が単射であるときは特にわかりやすく、φ の像 $\operatorname{Im}\varphi$ が G と 1 対 1 対応することで、G の構造が H に含まれていることがうかがえる。

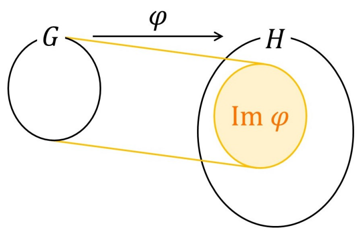

図 1: 単射準同型 $\varphi: G \to H$ のイメージ

しかし、一般の準同型は単射であるとは限らない。そのような一般の準同型では、いくつかの G の元からなる “塊” が 1 つの H の元に対応しているように見ることができる。さらに、x と x' が同じ “塊” に属していて、かつ、y と y' が同じ “塊” に属しているとすると、xy と $x'y'$ もまた同じ “塊” に属していることがわかる。ここで、群 G のなかで、“塊” に注目することで G より小さな構造が現れる。一般の準同型 φ の像 $\operatorname{Im}\varphi$ は、この G を小さくしたような構造と同じ構造をもつ。

この “塊” は、いわゆる同値類というものに他ならない。つまり、この G を小さくした構造とは、ある G 上の同値関係 $\sim$ で G を割った商 $G/\sim$ である。さらに、この同値関係 $\sim$ は

$$x \sim y \Longleftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$$

を満たしている。これはまさに写像の分解の前提条件である。よって、$\varphi = \psi \circ \pi$ となるような単射

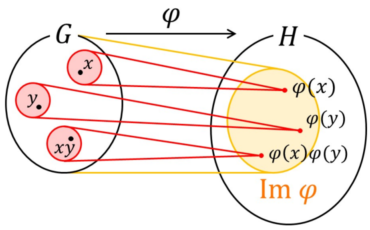

図 2: 一般の準同型 $\varphi : G \to H$ のイメージ

$\psi : G/\sim \to H$ が一意的に存在することがわかる。

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H \\ G/\sim \arrow[ur, dotted, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

ここで、1 つの疑問が発生する。この写像 $\pi : G \to G/\sim$ や $\psi : G/\sim \to H$ は準同型であるのだろうか。そもそも $G/\sim$ が群になるのだろうか。これらの答えは Yes であることが望まれる。なぜならば、まず、$G/\sim$ と $\mathrm{Im}\,\varphi$ は同じ構造をもっているので、特に $\mathrm{Im}\,\varphi$ がもつ群構造も共有されるべきである。そして、それらを繋ぐ写像 π, ψ もまた準同型であってもらいたい。もっとも、今は群の議論をしてるので、図式に現れる集合はすべて群であり、写像はすべて準同型であることが望ましい。よって、これらの要求が満たされるようなものを考えていこう。

4　群 G 上の同値関係 $\sim$

まずは、写像の分解の条件 $x \sim y \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$ を満たす G 上の同値関係 $\sim$ を考える。

$\varphi(n) = e_H$ となるような元 $n \in G$(このような元全体を $\mathrm{Ker}\,\varphi$ と書く) をとると、

$$\varphi(xn) = \varphi(x)\varphi(n) = \varphi(x)$$

となるので、$y = xn$ なら $\varphi(x) = \varphi(y)$ となる。これを踏まえると、G 上の関係 $\sim$ は $N \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$ を用いて

$$\begin{aligned} x \sim y &\iff {}^{\exists}n \in N \text{ s.t. } y = xn \\ &\iff {}^{\exists}n \in N \text{ s.t. } x^{-1}y = n \\ &\iff x^{-1}y \in N \end{aligned}$$

と定義すればよさそうである。

とりあえず、これを一般化して任意の部分集合 $S \subset G$ に対して

$$x \sim y \iff x^{-1}y \in S$$

と定義してみる。果たしてこれは G 上の同値関係になるのだろうか。実際これは、S が G の部分群なら同値関係となる。

群 G の部分群 N に対して上で定めた G 上の同値関係 $\sim$ による $x \in G$ の同値類 $[x]_\sim$ は $xN = \{xn \mid h \in N\}$ と相等する。この同値類 xN を x の N による右剰余類といい、N による右剰余類全体 $G/\sim$ を G/N と書く。

5 $G/\sim$ の群構造

次に、$G/\sim = G/N$ が群になるようにしたい。そもそも G/N 上の演算をどのように定義すればよいだろうか。ここで、要請の 1 つである自然な写像

$$\begin{array}{rccc} \pi: & G & \longrightarrow & G/N \\ & \cup & & \cup \\ & g & \longmapsto & gN \end{array}$$

が準同型になるということから、任意の $g, h \in G$ に対して $\pi(g)\pi(h) = \pi(gh)$ を満たすように、つまり

$$(gN)(hN) = (gh)N$$

と定義したい。しかし、これは本当に演算になるのだろうか。具体的には、$gN = g'N, hN = h'N$ となる任意の $g, g', h, h' \in G$ に対して

$$(gh)N = (g'h')N$$

となっているのだろうか (つまり、この定義が well-defined であるかどうか)。

$gN = g'N$ なので $g' \in gN$ となり、$g' = gm$ となる $m \in N$ がとれる。同様に $h' = hn$ となる $n \in N$ がとれる。このとき

$$(g'h')N = (gmhn)N = (gmhN)(nN)$$

となる。また、N は G の部分群で $n \in N$ なので $nN = N$ となるので

$$g'h'N = gmhN$$

できる。もしここで、$mh = hm'$ となる $m' \in N$ が存在すれば、同様にして

$$g'h'N = gmhN = ghm'N = ghN$$

となり、G/N 上の演算が定義できる。しかし、このような $m' \in N$ はいつでもとれるとは限らない。これがいつでも存在するには

$$hN = Nh (= \{nh \mid n \in N\})$$

が成り立てばよい。

任意の $g \in G$ に対して $gN = Ng$ となる部分群 N を G の正規部分群という。そして、N が G の正規部分群なら

$$(gN)(hN) = ghN$$

という演算によって G/N は群になる。これを G の N による剰余群という。また、このとき自然な写像 $\pi : G \to G/N$; $g \mapsto gN$ は準同型となる (これを自然な準同型という)。

6 群準同型定理

これでようやく写像の分解を適用する準備が整った。

定理 2 (群準同型定理)**.** G, H を群、$\varphi : G \to H$ を群準同型写像とし、$N \subset \operatorname{Ker}\varphi$ を G の正規部分群とする。このとき、$\varphi = \psi \circ \pi$ となる群準同型写像 $\psi : G/N \to H$ がただ 1 つ存在する。

ψ が準同型であることは確認してはいないが、簡単なので読者に任せることにする。また、写像の分解の後半の主張の適用も読者に任せたい。